Défis Première Spé maths : inéquations Thiaude P.

Défi SECDEG 01 Une inéquation

Résoudre l'inéquation : $x(-x+4) < (2x-1)^2 + 2$.

Corrigé

On a les équivalences :

$$x(-x+4) < (2x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow -x^2 + 4x < (2x)^2 - 2(2x)(1) + (1)^2 + 2$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x < 4x^2 - 4x + 1 + 2 \Leftrightarrow -x^2 - 4x^2 + 4x + 4x - 1 - 2 < 0$$
$$\Leftrightarrow -5x^2 + 8x - 3 < 0$$

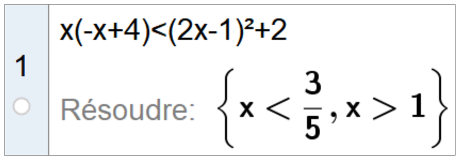
$-5x^2 + 8x - 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$, $b = 8$, $c = -3$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(-5)(-3) = 64 - 60 = 4$
$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{4}}{2(-5)} = \frac{-8-2}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{4}}{2(-5)} = \frac{-8+2}{-10} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

Règle (valable lorsqu'il y a deux racines)
« $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines »
On obtient donc le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
Signe de $-5x^2 + 8x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de $-5x^2 + 8x - 3 < 0$ est $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{5}\right[\cup \left]1\,;\,+\infty\right[$
et c'est aussi l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ.



Défi SECDEG 02 Une inéquation du troisième degré

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 28x + 15$.

1. Déterminer la constante réelle c telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(-2x^2 + 13x + c)$$
2. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$.

Corrigé

1. Déterminons la constante c

Développons :

$$(x-1)(-2x^2 + 13x + c)$$
$$= -2x^3 + 13x^2 + cx + 2x^2 - 13x - c$$
$$= -2x^3 + 15x^2 + (c-13)x - c$$

On doit donc avoir, pour tout réel x : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 + (c-13)x - c$.

Or, pour tout réel x : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 28x + 15$.

Par identification des coefficients, on en déduit que : $\begin{cases} c - 13 = -28 \\ -c = 15 \end{cases}$

qui s'écrit aussi $\begin{cases} c = -28 + 13 \\ c = -15 \end{cases}$, soit $\begin{cases} c = -15 \\ c = -15 \end{cases}$, qui se réduit à : $c = -15$.

Il est nécessaire d'obtenir deux fois la même valeur pour c, sinon c'est qu'il y a une erreur de calcul ou une erreur dans l'énoncé.

2. Tableau de signes de $f(x)$

On va étudier séparément les deux facteurs $(x-1)$ et $(-2x^2 + 13x - 15)$ intervenant dans la factorisation de $f(x)$ obtenue au point précédent puis dresser un tableau de signes à plusieurs étages.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)(-2x^2 + 13x - 15)$.

• étude de : $x - 1$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

• **étude de : $-2x^2 + 13x - 15$**

$-2x^2 + 13x - 15$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 13$ et $c = -15$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4(-2)(-15) = 49$

$\Delta > 0$ donc $-2x^2 + 13x - 15$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 - \sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-13 - 7}{-4} = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 + \sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-13 + 7}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines »

• tableau de signes

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
Signe de $(1x - 1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $(-2x^2 + 13x - 15)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

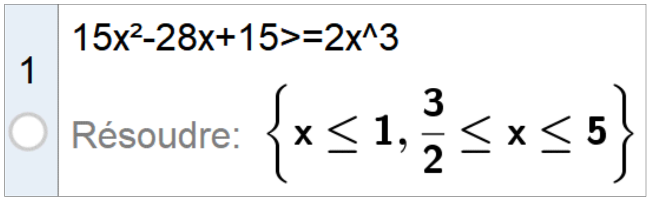
3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$.

L'inéquation $15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$ s'écrit aussi :

$15x^2 - 28x + 15 - 12x^3 \geqslant 2x^3 - 2x^3$, c'est-à-dire : $f(x) \geqslant 0$.

La dernière ligne du tableau de signes précédent donne alors :

$$\boldsymbol{S =]-\infty\,;\,1\,] \cup [\,\frac{3}{2}\,;5]}$$



Défi SECDEG 03 Une inéquation avec quotient

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{3x}{-x+5} \geqslant \frac{1}{x-1}$$

Corrigé

• recherche des valeurs interdites

Il faut que $-x + 5 \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \neq 5$ et $x \neq 1$.

Les valeurs interdites sont donc : 1 et 5.

• Pour x différent d'une valeur interdite, on a les équivalences :

$$\frac{3x}{-x+5} \geqslant \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-x+5} - \frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-x+5} - \frac{1}{x-1} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x \times (x-1)}{(-x+5) \times (x-1)} - \frac{1 \times (-x+5)}{(x-1) \times (-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x(x-1) - (-x+5)}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 3x + x - 5}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x - 5}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$3x^2 - 2x - 5$ est de la forme $3x^2 - 2x - 5$ avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = -5$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-5) = 4 + 60 = 64$.

$\Delta > 0$ donc $3x^2 - 2x - 5$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{2 - 8}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{2 + 8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines »

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1		1		$\frac{5}{3}$		5	$+\infty$
$3x^2-2x-5$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-x+5$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$Q(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

L'inéquation s'écrit $Q(x) \geqslant 0$, la dernière ligne du tableau précédent donne :

$\boldsymbol{S = [-1;1[\cup [\frac{5}{3}\ ;5[}$.

1 3x/(-x+5)>=1/(x-1)

Résoudre: $\left\{-1 \leq x < 1, \frac{5}{3} \leq x < 5\right\}$

Défi SECDEG 04 **Une inéquation avec quotient**

Résoudre l'inéquation :

$$\boldsymbol{x^2 - x + 1 \leqslant \frac{x+3}{3x+1}}$$

Corrigé

• recherche des valeurs interdites

Il faut que : $3x + 1 \neq 0$,c'est-à-dire : $x \neq -\frac{1}{3}$.

• Pour $x \neq -\frac{1}{3}$ on a les équivalences :

$$x^2 - x + 1 \leqslant \frac{x+3}{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x+3}{3x+1} \leqslant \frac{x+3}{3x+1} - \frac{x+3}{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x+3}{3x+1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-x+1)(3x+1)}{3x+1} - \frac{x+3}{3x+1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-x+1)(3x+1)-(x+3)}{3x+1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^3+x^2-3x^2-x+3x+1-x-3}{3x+1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^3-2x^2+x-2}{3x+1} \leqslant 0$$

Remarquons que $3x^3 - 2x^2 + x - 2$ s'annule pour $x = 1$ (et peut-être pour d'autres valeurs de x) donc on recherche une factorisation par $(x-1)$, il existe une constante réelle b telle que :

$$3x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-1)(3x^2 + bx + 2)$$
$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 3x^3 + bx^2 + 2x - 3x^2 - bx - 2$$
$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 3x^3 + (b-3)x^2 + (2-b)x - 2$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} b-3=-2 \\ 2-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2+3 \\ -b=1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ -b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow b=1$$

L'inéquation de départ est donc équivalente à :

$$\frac{(x-1)(3x^2+x+2)}{3x+1} \leqslant 0$$

• $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

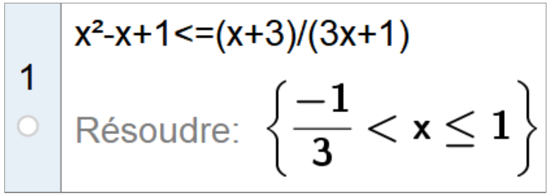
Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

• $3x^2 + x + 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3, b = 1, c = 2$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(3)(2) = 1 - 24 = -23$
$\Delta < 0$ donc $3x^2 + x + 2$ n'a pas de racine réelle.
Règle (dans le cas $\Delta < 0$) : « $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a et ne s'annule pas ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$3x^2+x+2$	$+$		$+$		$+$
$3x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$Q(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

On souhaite que $Q(x)$ soit négatif ou nul, la dernière du tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions : $\boldsymbol{S =]-\frac{1}{3}\ ;1]}$.



Défi SECDEG 05 **Position relative d'une parabole et d'une droite**
Le plan est muni d'un repère orthogonal. On note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 7$ et g la fonction affine dont la droite représentative passe par $A(-1\,;4)$ et $B(5\,;1)$. Étudier la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_g$.

Corrigé
Pour tout réel x, on a : $g(x) = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{5-(-1)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

donc :

$$g(x) = -\frac{1}{2}\big(x-(-1)\big) + 4 = -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{8}{2} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}x + \frac{-1+8}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

On a donc, pour tout réel x : $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

La position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir de l'étude du signe de la différence $f(x) - g(x)$.

On a, pour tout réel x :

$$f(x) - g(x)$$
$$= x^2 - 5x + 7 - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}\right)$$
$$= x^2 - 5x + 7 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$= x^2 - 5x + \frac{1}{2}x + 7 - \frac{7}{2}$$
$$= x^2 - \frac{10}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{14}{2} - \frac{7}{2}$$
$$= x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{7}{2}$$

$x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{7}{2}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -\frac{9}{2}$ et $c = \frac{7}{2}$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{81}{4} - \frac{28}{2} = \frac{81}{4} - \frac{56}{4} = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{9}{2} - \frac{5}{2}}{2(1)} = \frac{\frac{4}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

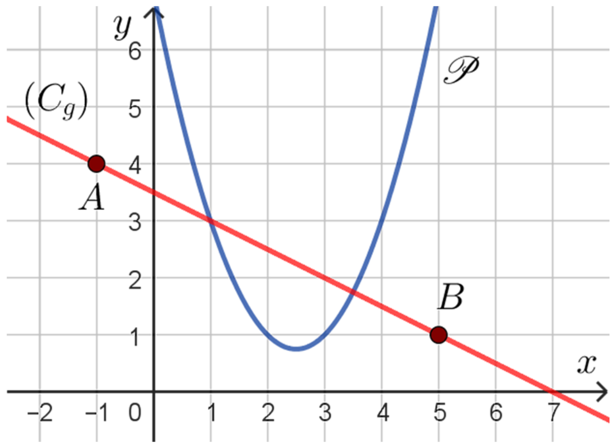
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{9}{2} + \frac{5}{2}}{2(1)} = \frac{\frac{14}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- sur $]-\infty;1[$ et sur $]\frac{7}{2}\,;+\infty[$: $\mathcal{P}$ est strictement **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$
- sur $]1\,;\frac{7}{2}[$: $\mathcal{P}$ est strictement **en dessous** de $\mathcal{C}_g$
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 1 et $\frac{7}{2}$



Compléments

Les points d'intersection ont pour coordonnées $(1;3)$ et $\left(\frac{7}{2}\,;\frac{7}{4}\right)$.

Défi SECDEG 06 Position relative de deux paraboles

On munit le plan d'un repère, f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 8x - 14 \text{ et } g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + 10$$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Corrigé

La position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir de l'étude du signe de la différence $f(x) - g(x)$.

On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - g(x) \\ &= -x^2 + 8x - 14 - \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + 10\right) \\ &= -x^2 + 8x - 14 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x - 10 \\ &= -\frac{4}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{32}{4}x + \frac{15}{4} - 14 - 10 \\ &= -\frac{5}{4}x^2 + \frac{47}{4}x - 24 \end{aligned}$$

$-\frac{5}{4}x^2 + \frac{47}{4}x - 24$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{5}{4}$, $b = \frac{47}{4}$ et $c = -24$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{47}{4}\right)^2 - 4\left(-\frac{5}{4}\right)(-24) = \frac{289}{16} = \left(\frac{17}{4}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{47}{4} - \frac{17}{4}}{2\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{64}{4}}{-\frac{5}{2}} = +\frac{16}{\frac{5}{2}} = 16 \times \frac{2}{5} = \frac{32}{5} \ (= 6{,}4)$$

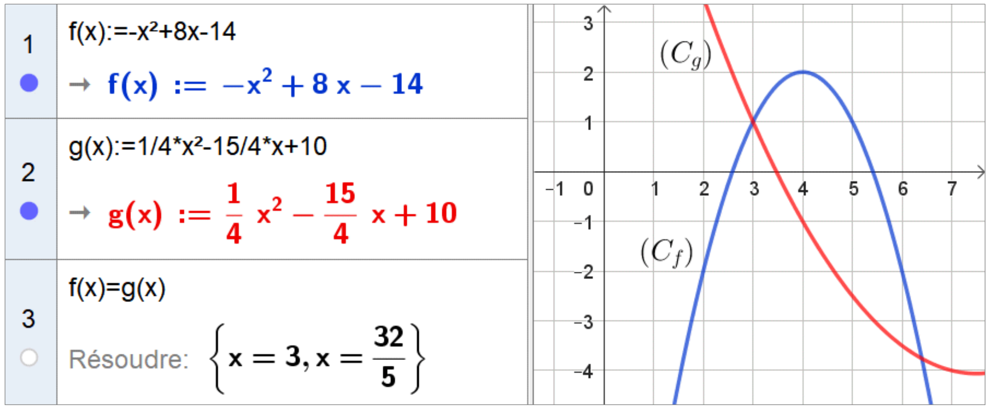
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{47}{4} + \frac{17}{4}}{2\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{30}{4}}{-\frac{5}{2}} = +\frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{15}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{15 \times 2}{2 \times 5} = 3$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$\frac{32}{5}$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- sur $]-\infty;3[$ et sur $\left]\frac{32}{5}\,;+\infty\right[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement **en dessous** de $\mathcal{C}_g$
- sur $\left]3\,;\frac{32}{5}\right[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$
- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 3 et $\frac{32}{5}$



Complément

$$f(3) = -(3)^2 + 8(3) - 14 = 1 \quad (= g(3))$$

$$f\left(\frac{32}{5}\right) = -\left(\frac{32}{5}\right)^2 + 8\left(\frac{32}{5}\right) - 14 = -\frac{94}{25} \quad \left(= g\left(\frac{32}{5}\right)\right)$$

Les points d'intersection des deux courbes sont :

$$E(3\,;1) \quad \text{et} \quad F\left(\frac{32}{5}\,;-\frac{94}{25}\right)$$

Défi SECDEG 07 Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x+1}\leqslant\frac{x^2}{x^2-1}$$

1/(x-1)+5/(x+1)<=x²/(x²-1)

Résoudre: $\left\{x < -1, -\sqrt{5}+3 \leq x < 1, x \geq \sqrt{5}+3\right\}$

Corrigé

• recherche des valeurs interdites

Il faut que : $x-1\neq 0$, $x+1\neq 0$ et $x^2-1\neq 0$, c'est-à-dire : $x\neq -1$ et $x\neq 1$.

• Pour x différent de -1 et de 1 on a les équivalences

$$\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x+1}\leqslant\frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{5}{x+1}-\frac{x^2}{x^2-1}\leqslant 0-\frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\times(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+5(x-1)-x^2}{(x-1)(x+1)}\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+5x-5-x^2}{(x-1)(x+1)}\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-4}{(x-1)(x+1)}\leqslant 0$$

[N.R.] $-x^2+6x-4$ admet pour racines $3-\sqrt{5}(\approx 0{,}76)$ et $3+\sqrt{5}$ $(\approx 5{,}24)$

Règle : « $ax+b$ est du signe de a à droite de sa racine ».
Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$3-\sqrt{5}$		1		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
$-x^2+6x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$Q(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

On souhaite que $Q(x)$ soit négatif ou nul, la dernière du tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions :

$$\boldsymbol{S=\,]-\infty;-1[\,\cup\,[3-\sqrt{5};1[\,\cup\,[3+\sqrt{5};+\infty[}$$